



---

EXAME FINAL NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

---

**Prova Escrita de Matemática A**

---

12.º Ano de Escolaridade

---

Decreto-Lei n.º 139/2012, de 5 de julho

---

**Prova 635/1.ª Fase**

---

Critérios de Classificação

18 Páginas

---

**2015**

## CRITÉRIOS GERAIS DE CLASSIFICAÇÃO

A classificação a atribuir a cada resposta resulta da aplicação dos critérios gerais e dos critérios específicos apresentados para cada item e é expressa por um número inteiro.

A ausência de indicação inequívoca da versão da prova implica a classificação com zero pontos das respostas aos itens de escolha múltipla.

As respostas ilegíveis são classificadas com zero pontos.

Em caso de omissão ou de engano na identificação de uma resposta, esta pode ser classificada se for possível identificar inequivocamente o item a que diz respeito.

Se for apresentada mais do que uma resposta ao mesmo item, só é classificada a resposta que surgir em primeiro lugar.

### Itens de seleção

Nos itens de escolha múltipla, a cotação do item só é atribuída às respostas que apresentem de forma inequívoca a opção correta. Todas as outras respostas são classificadas com zero pontos.

Nas respostas aos itens de escolha múltipla, a transcrição do texto da opção escolhida é considerada equivalente à indicação da letra correspondente.

### Itens de construção

Nos itens de resposta restrita e de resposta extensa, os critérios de classificação apresentam-se organizados por níveis de desempenho ou por etapas. A cada nível de desempenho e a cada etapa corresponde uma dada pontuação.

A classificação das respostas aos itens cujos critérios se apresentam organizados por níveis de desempenho resulta da pontuação do nível de desempenho em que forem enquadradas e da aplicação dos critérios de desvalorização definidos para situações específicas.

A classificação das respostas aos itens cujos critérios se apresentam organizados por etapas resulta da soma das pontuações atribuídas às etapas apresentadas e da aplicação dos critérios de desvalorização definidos para situações específicas.

Nas respostas classificadas por níveis de desempenho, se permanecerem dúvidas quanto ao nível a atribuir, deve optar-se pelo nível mais elevado de entre os dois tidos em consideração.

É classificada com zero pontos qualquer resposta que não atinja o nível 1 de desempenho.

A classificação das respostas aos itens que envolvam a produção de um texto tem em conta a organização dos conteúdos e a utilização da linguagem científica adequada.

As respostas que não apresentem exatamente os mesmos termos ou expressões constantes dos critérios específicos de classificação são classificadas em igualdade de circunstâncias com aquelas que os apresentem, desde que o seu conteúdo seja cientificamente válido, adequado ao solicitado e enquadrado pelos documentos curriculares de referência.

A classificação das respostas aos itens que envolvam o uso obrigatório das potencialidades gráficas da calculadora tem em conta a apresentação, num referencial, do gráfico da função ou dos gráficos das funções visualizados, devidamente identificados.

No quadro seguinte, apresentam-se os critérios de classificação a aplicar, em situações específicas, às respostas aos itens de resposta restrita e de resposta extensa que envolvam a realização de cálculos.

Situação	Classificação
1. Utilização de processos de resolução que não estão previstos no critério específico de classificação.	É aceite qualquer processo de resolução cientificamente correto, desde que enquadrado pelo programa da disciplina (ver nota 1). O critério específico é adaptado ao processo de resolução apresentado.
2. Utilização de processos de resolução que não respeitem as instruções dadas [exemplos: «sem recorrer à calculadora gráfica», «recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora»].	A etapa em que a instrução não é respeitada e todas as etapas subsequentes que dela dependam são pontuadas com zero pontos.
3. Apresentação apenas do resultado final quando é pedida a apresentação de cálculos ou justificações.	A resposta é classificada com zero pontos.
4. Ausência de apresentação de cálculos ou de justificações necessários à resolução de uma etapa.	A etapa é pontuada com zero pontos.
5. Ausência de apresentação explícita de uma etapa que não envolva cálculos ou justificações.	Se a resolução apresentada permitir perceber inequivocamente que a etapa foi percorrida, esta é pontuada com a pontuação prevista. Caso contrário, a etapa é pontuada com zero pontos, bem como todas as etapas subsequentes que dela dependam.
6. Transcrição incorreta de dados do enunciado, que não altere o que se pretende avaliar com o item.	Se a dificuldade da resolução do item não diminuir, é subtraído um ponto à soma das pontuações atribuídas. Se a dificuldade da resolução do item diminuir, o item é classificado do modo seguinte: – nas etapas em que a dificuldade da resolução diminuir, a pontuação máxima a atribuir é a parte inteira de metade da pontuação prevista; – nas etapas em que a dificuldade da resolução não diminuir, estas são pontuadas de acordo com os critérios específicos de classificação.
7. Transcrição incorreta de um número ou de um sinal na resolução de uma etapa.	Se a dificuldade da resolução da etapa não diminuir, é subtraído um ponto à pontuação da etapa. Se a dificuldade da resolução da etapa diminuir, a pontuação máxima a atribuir a essa etapa é a parte inteira de metade da pontuação prevista. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido (ver nota 2).
8. Ocorrência de um erro ocasional num cálculo, na resolução de uma etapa.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa em que o erro ocorre. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido (ver nota 2).
9. Ocorrência de um erro que revela desconhecimento de conceitos, de regras ou de propriedades, na resolução de uma etapa.	A pontuação máxima a atribuir a essa etapa é a parte inteira de metade da pontuação prevista. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido (ver nota 2).
10. Resolução incompleta de uma etapa.	Se à resolução da etapa faltar apenas a passagem final, é subtraído um ponto à pontuação da etapa; caso contrário, a pontuação máxima a atribuir é a parte inteira de metade da pontuação prevista.

Situação	Classificação
11. Apresentação de cálculos intermédios com um número de casas decimais diferente do solicitado ou apresentação de um arredondamento incorreto.	É subtraído um ponto à soma das pontuações atribuídas, salvo se houver indicação em contrário no critério específico de classificação.
12. Apresentação do resultado final que não respeita a forma solicitada [exemplo: é pedido o resultado na forma de fração, e a resposta apresenta-se na forma decimal].	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
13. Utilização de valores exatos nos cálculos intermédios e apresentação do resultado final com aproximação quando deveria ter sido apresentado o valor exato.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
14. Utilização de valores aproximados numa etapa quando deveriam ter sido usados valores exatos.	A pontuação máxima a atribuir a essa etapa, bem como a cada uma das etapas subsequentes que dela dependam, é a parte inteira de metade da pontuação prevista.
15. Apresentação do resultado final com um número de casas decimais diferente do solicitado, ou apresentação do resultado final incorretamente arredondado.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
16. Omissão da unidade de medida na apresentação do resultado final.	A etapa relativa à apresentação do resultado final é pontuada com a pontuação prevista.
17. Apresentação de elementos em excesso face ao solicitado.	Se os elementos em excesso não afetarem a caracterização do desempenho, a classificação a atribuir à resposta não é desvalorizada.  Se os elementos em excesso afetarem a caracterização do desempenho, são subtraídos dois pontos à soma das pontuações atribuídas, salvo se houver indicação em contrário no critério específico de classificação.
18. Utilização de simbologias ou de expressões inequivocamente incorretas do ponto de vista formal.	É subtraído um ponto à soma das pontuações atribuídas, exceto: – se as incorreções ocorrerem apenas em etapas já pontuadas com zero pontos; – nos casos de uso do símbolo de igualdade onde, em rigor, deveria ter sido usado o símbolo de igualdade aproximada.

**Nota 1** – A título de exemplo, faz-se notar que não são aceites processos de resolução que envolvam a aplicação da regra de Cauchy, da regra de L'Hôpital ou de resultados da teoria de matrizes.

**Nota 2** – Se a dificuldade da resolução das etapas subsequentes não diminuir, estas são pontuadas de acordo com os critérios específicos de classificação; se a dificuldade da resolução das etapas subsequentes diminuir, a pontuação máxima a atribuir a cada uma delas é a parte inteira de metade da pontuação prevista.

## CRITÉRIOS ESPECÍFICOS DE CLASSIFICAÇÃO

### GRUPO I

1. a 8. .... (8 × 5 pontos)..... **40 pontos**

Itens	1	2	3	4	5	6	7	8
Versão 1	C	C	B	A	B	C	D	B
Versão 2	B	B	A	D	C	B	C	C

### GRUPO II

1. .... **15 pontos**

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos.

#### 1.º Processo

Identificar  $i^{19}$  com  $-i$  ..... 2 pontos

Escrever a expressão  $-2 + 2i^{19}$  na forma algébrica  $(-2 - 2i)$  ..... 1 ponto

Apresentar um argumento de  $-2 - 2i$  ..... 2 pontos

Escrever um argumento de  $z$ , em função de  $\theta$  ..... 2 pontos

Escrever uma condição em  $\theta$  para que  $z$  seja um imaginário puro (**ver nota**).... 3 pontos

Resolver a condição em ordem a  $\theta$  ..... 3 pontos

Obter os valores de  $\theta$  pertencentes ao intervalo  $]0, 2\pi[ \left( \frac{3\pi}{4} \text{ e } \frac{7\pi}{4} \right)$  ..... 2 pontos

**Nota** – Se for apresentada apenas a condição  $\frac{5\pi}{4} - \theta = \frac{\pi}{2}$  ou apenas a condição  $\frac{5\pi}{4} - \theta = \frac{\pi}{2} \vee \frac{5\pi}{4} - \theta = \frac{3\pi}{2}$ , a pontuação a atribuir nesta etapa é 1 ponto.

Nesta situação, a pontuação máxima a atribuir na etapa seguinte é de 1 ponto.

#### 2.º Processo

Identificar  $i^{19}$  com  $-i$  ..... 2 pontos

Escrever a expressão  $-2 + 2i^{19}$  na forma algébrica  $(-2 - 2i)$  ..... 1 ponto

Escrever  $z = \frac{-2 - 2i}{\sqrt{2} \cos \theta + i\sqrt{2} \sin \theta}$  ..... 1 ponto

Escrever  $z = \frac{(-2 - 2i)(\sqrt{2} \cos \theta - i\sqrt{2} \sin \theta)}{(\sqrt{2} \cos \theta + i\sqrt{2} \sin \theta)(\sqrt{2} \cos \theta - i\sqrt{2} \sin \theta)}$  ..... 1 ponto

Escrever  $z = \frac{(-2\sqrt{2} \cos \theta - 2\sqrt{2} \sin \theta) + (2\sqrt{2} \sin \theta - 2\sqrt{2} \cos \theta)i}{2}$  ..... 2 pontos

Escrever uma condição em $\theta$ para que $z$ seja um imaginário puro .....	3 pontos
Resolver a condição em ordem a $\theta$ .....	3 pontos
Obter os valores de $\theta$ pertencentes ao intervalo $]0, 2\pi[ \left( \frac{3\pi}{4} \text{ e } \frac{7\pi}{4} \right)$ .....	2 pontos

**2.1. .... 15 pontos**

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, quatro processos.

**1.º Processo** (através de uma tabela de dupla entrada)

Construir uma tabela de dupla entrada cujas entradas sejam o género (homem, mulher) e o local de residência (Coimbra, fora de Coimbra) .....	1 ponto
Preencher a célula da tabela relativa à informação «60% dos funcionários residem fora de Coimbra» .....	2 pontos
Preencher as células da tabela relativas à informação «o número de homens é igual ao número de mulheres» .....	2 pontos
Utilizar a informação «30% dos homens residem fora de Coimbra» para determinar a probabilidade de o funcionário ser homem e residir fora de Coimbra, e colocar o valor obtido na célula respetiva ( <b>ver nota</b> ) .....	4 pontos
Preencher as restantes células que permitem resolver o problema .....	3 pontos
Identificar o pedido com $P(M C)$ , sendo $M$ o acontecimento «o funcionário escolhido é mulher» e $C$ o acontecimento «o funcionário escolhido reside em Coimbra» .....	1 ponto
Escrever $P(M C) = \frac{P(M \cap C)}{P(C)}$ .....	1 ponto
Obter $P(M C) \left( \frac{1}{8} \right)$ .....	1 ponto

**Nota** – Se o valor apresentado nesta célula for 0,3, a pontuação a atribuir nesta etapa é 0 pontos.

**2.º Processo** (através de um diagrama em árvore)

**Nota prévia** – Se a resposta apresentar um diagrama em árvore de cuja raiz saem dois ramos relativos ao local de residência (Coimbra, fora de Coimbra), saindo de cada um destes dois novos ramos relativos ao género (homem, mulher), a classificação da resposta deve ser enquadrada no quarto processo.

Construir um diagrama em árvore de cuja raiz saem dois ramos relativos ao género (homem, mulher), saindo de cada um destes dois novos ramos relativos ao local de residência (Coimbra, fora de Coimbra) .....	2 pontos
Colocar as probabilidades relativas à informação «o número de homens é igual ao número de mulheres» nos respetivos ramos .....	2 pontos
Colocar a probabilidade relativa à informação «30% dos homens residem fora de Coimbra» no respetivo ramo .....	2 pontos
Colocar a probabilidade de o funcionário ser homem e residir fora de Coimbra ( <b>ver nota</b> ) .....	2 pontos

Colocar a probabilidade de o funcionário ser mulher e residir fora de Coimbra.....	3 pontos	
Colocar a probabilidade de o funcionário ser mulher e residir em Coimbra .....	1 ponto	
OU		4 pontos
Colocar a probabilidade de o funcionário ser homem e residir em Coimbra .....	1 ponto	
Colocar a probabilidade de o funcionário ser mulher e residir em Coimbra .....	3 pontos	
Identificar o pedido com $P(M C)$ , sendo $M$ o acontecimento «o funcionário escolhido é mulher» e $C$ o acontecimento «o funcionário escolhido reside em Coimbra» .....		1 ponto
Escrever $P(M C) = \frac{P(M \cap C)}{P(C)}$ .....		1 ponto
Obter $P(M C) \left(\frac{1}{8}\right)$ .....		1 ponto

**Nota** – A pontuação relativa a esta etapa só é atribuída se à etapa anterior não tiverem sido atribuídos 0 pontos.

### 3.º Processo (aplicando as propriedades das probabilidades)

Seja  $M$  o acontecimento «o funcionário escolhido é mulher» e seja  $C$  o acontecimento «o funcionário escolhido reside em Coimbra».

Identificar o pedido com $P(M C)$ .....	1 ponto
Reconhecer que $P(\bar{C}) = 0,6$ .....	1 ponto
Obter $P(C)$ .....	1 ponto
Reconhecer que $P(M) = 0,5$ .....	1 ponto
Reconhecer $P(\bar{M}) = 0,5$ .....	1 ponto
Reconhecer que $P(\bar{C} \bar{M}) = 0,3$ .....	2 pontos
Determinar $P(\bar{C} \cap \bar{M})$ .....	2 pontos
Determinar $P(C \cup M)$ .....	2 pontos
Escrever $P(C \cup M) = P(C) + P(M) - P(C \cap M)$ .....	1 ponto
Determinar $P(C \cap M)$ .....	1 ponto
Escrever $P(M C) = \frac{P(M \cap C)}{P(C)}$ .....	1 ponto
Obter $P(M C) \left(\frac{1}{8}\right)$ .....	1 ponto

**4.º Processo** (aplicando as propriedades das probabilidades)

Seja  $M$  o acontecimento «o funcionário escolhido é mulher», seja  $H$  o acontecimento «o funcionário escolhido é homem» e seja  $C$  o acontecimento «o funcionário escolhido reside em Coimbra».

Identificar o pedido com $P(M C)$ .....	1 ponto
Reconhecer que $P(\bar{C}) = 0,6$ ou $P(C) = 0,4$ .....	2 pontos
Reconhecer que $P(M) = 0,5$ ou $P(H) = 0,5$ .....	2 pontos
Reconhecer que $P(\bar{C} H) = 0,3$ .....	2 pontos
Determinar $P(\bar{C} \cap H)$ .....	2 pontos
Escrever $P(H) = P(C \cap H) + P(\bar{C} \cap H)$ .....	1 ponto
Determinar $P(C \cap H)$ .....	1 ponto
Escrever $P(C) = P(C \cap H) + P(C \cap M)$ .....	1 ponto
Determinar $P(C \cap M)$ .....	1 ponto
OU .....	4 pontos
Escrever $P(\bar{C}) = P(\bar{C} \cap M) + P(\bar{C} \cap H)$ .....	1 ponto
Determinar $P(\bar{C} \cap M)$ .....	1 ponto
Escrever $P(M) = P(C \cap M) + P(\bar{C} \cap M)$ .....	1 ponto
Determinar $P(C \cap M)$ .....	1 ponto
Escrever $P(M C) = \frac{P(M \cap C)}{P(C)}$ .....	1 ponto
Obter $P(M C) \left(\frac{1}{8}\right)$ .....	1 ponto



Tópicos de resposta:

- A) Enunciado da regra de Laplace: quando os casos possíveis são equiprováveis, a probabilidade de um acontecimento é igual ao quociente entre o número de casos favoráveis a esse acontecimento e o número de casos possíveis (**ver nota 1**).
- B) Explicação do número de casos possíveis:  ${}^{80}C_3$  é o número de maneiras de escolher três funcionários, de entre os 80 funcionários da empresa (**ver nota 2**).
- C) Explicação do número de casos favoráveis: «haver, no máximo, dois funcionários a residir em Coimbra» é o contrário de «haver três funcionários a residir em Coimbra». Assim, o número de casos favoráveis é igual à diferença entre o número de maneiras de escolher 3 dos 80 funcionários da empresa ( ${}^{80}C_3$ ) e o número de maneiras de escolher 3 dos 32 (40% de 80) funcionários da empresa que residem em Coimbra (**ver nota 3**).

Níveis	Descritores do nível de desempenho	Pontuação
5	Na resposta, são contemplados os três tópicos, com organização coerente dos conteúdos e linguagem científica adequada.	15
4	Na resposta, são contemplados os três tópicos, com falhas na organização dos conteúdos ou na utilização da linguagem científica. OU Na resposta, são contemplados apenas os tópicos A e C OU apenas os tópicos B e C, com organização coerente dos conteúdos e linguagem científica adequada.	12
3	Na resposta, são contemplados apenas os tópicos A e C OU apenas os tópicos B e C, com falhas na organização dos conteúdos ou na utilização da linguagem científica. OU Na resposta, são contemplados apenas os tópicos A e B OU apenas o tópico C, com organização coerente dos conteúdos e linguagem científica adequada.	9
2	Na resposta, são contemplados apenas os tópicos A e B OU apenas o tópico C, com falhas na organização dos conteúdos ou na utilização da linguagem científica. OU Na resposta, é contemplado apenas o tópico A OU apenas o tópico B, com organização coerente dos conteúdos e linguagem científica adequada.	6
1	Na resposta, é contemplado apenas o tópico A OU apenas o tópico B, com falhas na organização dos conteúdos ou na utilização da linguagem científica.	3

**Notas:**

- Se não for referida a condição de equiprobabilidade dos casos possíveis, este tópico, a ser contemplado, é considerado «com falhas na organização dos conteúdos ou na utilização da linguagem científica».
- Se a explicação do número de casos possíveis for, por exemplo, « ${}^{80}C_3$  é escolher 3 dos 80 funcionários», e não « ${}^{80}C_3$  é o número de maneiras de escolher 3 dos 80 funcionários», considera-se que este tópico não foi contemplado.
- Se não for referido que 32 é 40% de 80, este tópico, a ser contemplado, é considerado «com falhas na organização dos conteúdos ou na utilização da linguagem científica».

**3.1. .... 10 pontos**

- Determinar  $d(0)$  ..... 4 pontos
- Determinar o raio da esfera, identificando-o com  $16 - d(0)$  (**ver nota 1**) ..... 3 pontos
- Obter o volume da esfera com o arredondamento pedido  $(4,19 \text{ cm}^3)$  (**ver nota 2**) 3 pontos

**Notas:**

1. Se o raio for identificado com  $\frac{16 - d(0)}{2}$ , a pontuação a atribuir nesta etapa é 1 ponto.
2. A pontuação relativa a esta etapa só é atribuída se, à etapa relativa à determinação do raio da esfera, não tiverem sido atribuídos 0 pontos.

**3.2. .... 15 pontos**

- Determinar  $d'(t)$  (**ver nota 1**) ..... 3 pontos
  - Aplicar a regra de derivação do produto de duas funções ..... 1 ponto
  - Escrever  $d'(t) = -e^{-0,05t} - 0,05(5 - t)e^{-0,05t}$  ..... 2 pontos
- Escrever a equação  $d'(t) = 0$  ..... 1 ponto
- Resolver a equação  $d'(t) = 0$  ..... 5 pontos
  - Escrever  $d'(t) = 0 \Leftrightarrow e^{-0,05t}(-1 - 0,05(5 - t)) = 0$  ..... 2 pontos
  - Escrever  $e^{-0,05t}(-1 - 0,05(5 - t)) = 0 \Leftrightarrow -1 - 0,05(5 - t) = 0$  2 pontos
  - Concluir que  $d'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 25$  ..... 1 ponto
- Justificar que a distância do centro da esfera ao ponto  $P$  é mínima para  $t = 25$  ..... 5 pontos
  - Apresentar um quadro de sinal de  $d'$  e de monotonia de  $d$  (**ver nota 2**) ..... 4 pontos
  - Indicar o valor de  $t$  para o qual a função é mínima ..... 1 ponto
  - OU
  - Referir que, como a função  $d$  tem derivada finita em  $\mathbb{R}^+$  e como  $25$  é o único zero da função  $d'$ , o mínimo da função  $d$  só pode ser atingido para  $t = 0$  ou para  $t = 25$  ..... 2 pontos
  - Referir que  $d(25) < d(0)$  ..... 3 pontos
- Apresentar a resposta (25 segundos) ..... 1 ponto

**Notas:**

1. Se for evidente a intenção de determinar a expressão da derivada da função, a pontuação mínima a atribuir nesta etapa é de 1 ponto.
2. Se, na primeira linha do quadro, a resposta apresentar  $-\infty$ , em vez de 0, a pontuação máxima a atribuir nesta etapa é de 3 pontos.

4.1. .... 15 pontos

Justificar que apenas a reta de equação  $x = \frac{1}{2}$  pode ser assíntota vertical do gráfico de  $f$  ..... 2 pontos

Determinar  $\lim_{x \rightarrow (\frac{1}{2})^-} f(x)$  ..... 10 pontos

Este limite pode ser determinado por, pelo menos, quatro processos.

**1.º Processo**

Escrever  $\lim_{x \rightarrow (\frac{1}{2})^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow (\frac{1}{2})^-} \frac{e^x - \sqrt{e}}{2x-1}$  ..... 1 ponto

Escrever  $\lim_{x \rightarrow (\frac{1}{2})^-} \frac{e^x - \sqrt{e}}{2x-1} = \lim_{x \rightarrow (\frac{1}{2})^-} \frac{e^x - e^{\frac{1}{2}}}{2x-1}$  ..... 1 ponto

Escrever  $\lim_{x \rightarrow (\frac{1}{2})^-} \frac{e^x - e^{\frac{1}{2}}}{2x-1} = \lim_{x \rightarrow (\frac{1}{2})^-} \frac{e^x - e^{\frac{1}{2}}}{2(x - \frac{1}{2})}$  ..... 1 ponto

Escrever  $\lim_{x \rightarrow (\frac{1}{2})^-} \frac{e^x - e^{\frac{1}{2}}}{2(x - \frac{1}{2})} = \lim_{x \rightarrow (\frac{1}{2})^-} \frac{e^{\frac{1}{2}}(e^{x-\frac{1}{2}} - 1)}{2(x - \frac{1}{2})}$  ..... 2 pontos

Escrever  $\lim_{x \rightarrow (\frac{1}{2})^-} \frac{e^{\frac{1}{2}}(e^{x-\frac{1}{2}} - 1)}{2(x - \frac{1}{2})} = \frac{e^{\frac{1}{2}}}{2} \lim_{x \rightarrow (\frac{1}{2})^-} \frac{e^{x-\frac{1}{2}} - 1}{x - \frac{1}{2}}$  ..... 1 ponto

Escrever  $\frac{e^{\frac{1}{2}}}{2} \lim_{x \rightarrow (\frac{1}{2})^-} \frac{e^{x-\frac{1}{2}} - 1}{x - \frac{1}{2}} = \frac{e^{\frac{1}{2}}}{2} \lim_{y \rightarrow 0^-} \frac{e^y - 1}{y}$

(ver nota 1) ..... 2 pontos

Reconhecer o limite notável  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$  ..... 1 ponto

Obter o valor de  $\lim_{x \rightarrow (\frac{1}{2})^-} f(x) \left( \frac{1}{2} e^{\frac{1}{2}} \right)$  ..... 1 ponto

**2.º Processo**

Escrever  $\lim_{x \rightarrow (\frac{1}{2})^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow (\frac{1}{2})^-} \frac{e^x - \sqrt{e}}{2x-1}$  ..... 1 ponto

Escrever  $\lim_{x \rightarrow (\frac{1}{2})^-} \frac{e^x - \sqrt{e}}{2x-1} = \lim_{y \rightarrow 0^-} \frac{e^{y+\frac{1}{2}} - \sqrt{e}}{2y}$  ..... 3 pontos

Escrever  $\lim_{y \rightarrow 0^-} \frac{e^{y+\frac{1}{2}} - \sqrt{e}}{2y} = \lim_{y \rightarrow 0^-} \frac{e^{y+\frac{1}{2}} - e^{\frac{1}{2}}}{2y}$  ..... 1 ponto

Escrever  $\lim_{y \rightarrow 0^-} \frac{e^{y+\frac{1}{2}} - e^{\frac{1}{2}}}{2y} = \lim_{y \rightarrow 0^-} \frac{e^{\frac{1}{2}}(e^y - 1)}{2y}$  ..... 2 pontos

Escrever  $\lim_{y \rightarrow 0^-} \frac{e^{\frac{1}{2}}(e^y - 1)}{2y} = \frac{e^{\frac{1}{2}}}{2} \lim_{y \rightarrow 0^-} \frac{e^y - 1}{y}$  ..... 1 ponto

Reconhecer o limite notável  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$  ..... 1 ponto

Obter o valor de  $\lim_{x \rightarrow (\frac{1}{2})^-} f(x) \left( \frac{1}{2} e^{\frac{1}{2}} \right)$  ..... 1 ponto

**3.º Processo**

Escrever  $\lim_{x \rightarrow (\frac{1}{2})^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow (\frac{1}{2})^-} \frac{e^x - \sqrt{e}}{2x-1}$  ..... 1 ponto

Escrever  $\lim_{x \rightarrow (\frac{1}{2})^-} \frac{e^x - \sqrt{e}}{2x-1} = \lim_{x \rightarrow (\frac{1}{2})^-} \frac{e^x - e^{\frac{1}{2}}}{2x-1}$  ..... 1 ponto

Escrever  $\lim_{x \rightarrow (\frac{1}{2})^-} \frac{e^x - e^{\frac{1}{2}}}{2x-1} = \lim_{x \rightarrow (\frac{1}{2})^-} \frac{e^x - e^{\frac{1}{2}}}{2(x - \frac{1}{2})}$  ..... 1 ponto

Escrever  $\lim_{x \rightarrow (\frac{1}{2})^-} \frac{e^x - e^{\frac{1}{2}}}{2(x - \frac{1}{2})} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow (\frac{1}{2})^-} \frac{e^x - e^{\frac{1}{2}}}{x - \frac{1}{2}}$  ..... 1 ponto

Referir que  $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{e^x - e^{\frac{1}{2}}}{x - \frac{1}{2}} = h'(\frac{1}{2})$ , sendo  $h$  a função

definida por  $h(x) = e^x$  ..... 3 pontos

Referir que  $h'(\frac{1}{2}) = e^{\frac{1}{2}}$  ..... 2 pontos

Concluir que  $\frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow (\frac{1}{2})^-} \frac{e^x - e^{\frac{1}{2}}}{x - \frac{1}{2}} = \frac{1}{2} e^{\frac{1}{2}}$  ..... 1 ponto

**4.º Processo**

Escrever  $\lim_{x \rightarrow (\frac{1}{2})^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow (\frac{1}{2})^-} \frac{e^x - \sqrt{e}}{2x-1}$  ..... 1 ponto

Escrever  $\lim_{x \rightarrow (\frac{1}{2})^-} \frac{e^x - \sqrt{e}}{2x-1} = \lim_{x \rightarrow (\frac{1}{2})^-} \frac{e^x - e^{\frac{1}{2}}}{2x-1}$  ..... 1 ponto

Escrever  $\lim_{x \rightarrow (\frac{1}{2})^-} \frac{e^x - e^{\frac{1}{2}}}{2x-1} = \lim_{x \rightarrow (\frac{1}{2})^-} \frac{e^x - e^{\frac{1}{2}}}{2(x - \frac{1}{2})}$  ..... 1 ponto

Escrever  $\lim_{x \rightarrow (\frac{1}{2})^-} \frac{e^x - e^{\frac{1}{2}}}{2(x - \frac{1}{2})} = \lim_{x \rightarrow (\frac{1}{2})^-} \frac{e^x(1 - e^{\frac{1}{2}-x})}{2(x - \frac{1}{2})}$  ..... 1 ponto

Escrever

$\lim_{x \rightarrow (\frac{1}{2})^-} \frac{e^x(1 - e^{\frac{1}{2}-x})}{2(x - \frac{1}{2})} = \lim_{x \rightarrow (\frac{1}{2})^-} \frac{e^x}{2} \times \lim_{x \rightarrow (\frac{1}{2})^-} \frac{1 - e^{\frac{1}{2}-x}}{x - \frac{1}{2}}$  ..... 2 pontos

Escrever

$\lim_{x \rightarrow (\frac{1}{2})^-} \frac{e^x}{2} \times \lim_{x \rightarrow (\frac{1}{2})^-} \frac{1 - e^{\frac{1}{2}-x}}{x - \frac{1}{2}} \underset{y = \frac{1}{2}-x}{=} \frac{e^{\frac{1}{2}}}{2} \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{1 - e^y}{-y}$

(ver nota 2) ..... 1 ponto

Escrever  $\frac{e^{\frac{1}{2}}}{2} \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{1 - e^y}{-y} = \frac{e^{\frac{1}{2}}}{2} \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{e^y - 1}{y}$  ..... 1 ponto

Reconhecer o limite notável  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$  ..... 1 ponto

Obter o valor de  $\lim_{x \rightarrow (\frac{1}{2})^-} f(x) \left( \frac{1}{2} e^{\frac{1}{2}} \right)$  ..... 1 ponto

Escrever  $\lim_{x \rightarrow (\frac{1}{2})^+} f(x) = \frac{3}{2} \ln\left(\frac{1}{2}\right)$

OU ..... 2 pontos

Referir que a função  $f$  é contínua à direita em  $\frac{1}{2}$

Concluir que o gráfico da função  $f$  não tem qualquer assíntota vertical ..... 1 ponto

**Notas:**

1. Se for referido que  $x \rightarrow (\frac{1}{2})^-$  é equivalente a  $x - \frac{1}{2} \rightarrow 0^-$ , esta etapa deve ser considerada como cumprida.
2. Se for referido que  $x \rightarrow (\frac{1}{2})^-$  é equivalente a  $\frac{1}{2} - x \rightarrow 0^+$ , esta etapa deve ser considerada como cumprida.

4.2. .... 15 pontos

- Determinar  $f'(x)$  em  $\left] \frac{1}{2}, +\infty \right[$  ..... 3 pontos
- Aplicar a regra de derivação do produto ..... 1 ponto
  - Obter  $f'(x)$  ..... 2 pontos
- Determinar  $f''(x)$  em  $\left] \frac{1}{2}, +\infty \right[$  (**ver nota 1**) ..... 3 pontos
- Determinar o zero de  $f''$  em  $\left] \frac{1}{2}, +\infty \right[$  ..... 2 pontos
- Escrever  $f''(x) = 0$  ..... 1 ponto
  - Obter o zero de  $f''$  em  $\left] \frac{1}{2}, +\infty \right[$  ..... 1 ponto
- Estudar a função  $f$  quanto ao sentido das concavidades do seu gráfico e quanto à existência de pontos de inflexão, no intervalo  $\left] \frac{1}{2}, +\infty \right[$  ..... 7 pontos
- Apresentar um quadro de sinal de  $f''$  e de sentido da concavidade do gráfico de  $f$  (ou equivalente) (**ver nota 2**) ..... 3 pontos
  - Referir que o gráfico de  $f$  tem concavidade voltada para baixo em  $\left] \frac{1}{2}, 1 \right[$  (**ver nota 3**) ..... 1 ponto
  - Referir que o gráfico de  $f$  tem concavidade voltada para cima em  $]1, +\infty[$  (**ver nota 4**) ..... 1 ponto
  - Indicar as coordenadas do ponto de inflexão do gráfico da função  $f$  em  $\left] \frac{1}{2}, +\infty \right[$  ((1, 0)) ..... 2 pontos

**Notas:**

1. Se for evidente a intenção de determinar a segunda derivada da função, a pontuação mínima a atribuir nesta etapa é de 1 ponto.
2. Se, na primeira linha do quadro, a resposta apresentar  $-\infty$ , em vez de  $\frac{1}{2}$ , a pontuação máxima a atribuir nesta etapa é de 2 pontos.
3. Se for referido que o gráfico de  $f$  tem concavidade voltada para baixo em  $\left] \frac{1}{2}, 1 \right]$ , em vez de  $\left] \frac{1}{2}, 1 \right[$ , esta etapa deve ser considerada como cumprida.
4. Se for referido que o gráfico de  $f$  tem concavidade voltada para cima em  $]1, +\infty[$ , em vez de  $]1, +\infty[$ , esta etapa deve ser considerada como cumprida.
5. Se for utilizada a expressão  $\frac{e^x - \sqrt{e}}{2x - 1}$ , a pontuação máxima a atribuir à resposta é de 2 pontos (1 ponto pela intenção de calcular  $f''(x)$  e 1 ponto pela intenção de resolver a equação  $f''(x) = 0$ ).

4.3. .... 15 pontos

- Justificar que a equação  $f(x) = 3$  tem, pelo menos, uma solução em  $]1, e[$  ..... 6 pontos
- Referir que a função  $f$  é contínua em  $[1, e]$  (**ver nota 1**) ..... 1 ponto
  - Calcular  $f(1)$  ..... 1 ponto
  - Calcular  $f(e)$  ..... 1 ponto
  - Referir que  $f(1) < 3 < f(e)$  ..... 2 pontos
  - Concluir que a equação  $f(x) = 3$  tem, pelo menos, uma solução em  $]1, e[$  ..... 1 ponto

- Reproduzir o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora, que permite(m) resolver o problema (**ver notas 2, 3 e 4**) ..... 4 pontos
- Apresentar a solução pedida (2, 41) ..... 5 pontos

**Notas:**

1. Se for referido que a função é contínua em  $]1, e[$ , a pontuação a atribuir nesta etapa é 0 pontos. A mesma pontuação deve ser atribuída se apenas for referido que a função é contínua.
2. Se não for apresentado o referencial, a pontuação a atribuir nesta etapa deve ser desvalorizada em 1 ponto.
3. Se a resposta apresentar, para  $x > \frac{1}{2}$ , o gráfico da função definida por  $y = \frac{e^x - \sqrt{e}}{2x - 1}$ , independentemente de estarem, ou não, desenhados outros gráficos, a pontuação a atribuir nesta etapa é 0 pontos.
4. Se for apresentado apenas o gráfico da função, para  $x > \frac{1}{2}$ , e não for apresentada a solução pedida, a pontuação a atribuir nesta etapa é 2 pontos.

**5.1. .... 5 pontos**

- Escrever a equação  $x - 2y + z + d = 0$  (ou equivalente) ..... 2 pontos
- Determinar o valor de  $d$  ..... 2 pontos
- Escrever uma equação do plano pedido ( $x - 2y + z - 2 = 0$  ou equivalente) (**ver notas 1 e 2**) ..... 1 ponto

**Notas:**

1. Se for apresentada apenas a equação  $x - 2y + z - 2 = 0$  (ou equivalente), a pontuação a atribuir à resposta é 5 pontos.
2. Se for apresentada apenas uma equação do tipo  $x - 2y + z + d = 0$  (ou equivalente), com o valor de  $d$  incorreto, a pontuação a atribuir à resposta é 2 pontos.

**5.2. .... 10 pontos**

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos.

**1.º Processo**

- Determinar  $\overline{AB}$  ..... 2 pontos
- Obter o raio da superfície esférica ..... 1 ponto
- Determinar as coordenadas do ponto médio do segmento de reta  $[AB]$  ..... 2 pontos
- Escrever a condição  $(x - 2)^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 5$  (ou equivalente) (**ver notas 1 e 2**) ..... 5 pontos

**Notas:**

1. A escrita de  $\sqrt{5}$ , em vez de 5, implica uma desvalorização de 2 pontos nesta etapa.
2. A escrita de  $\leq$ , em vez de  $=$ , implica uma desvalorização de 2 pontos nesta etapa. A escrita de  $<$  ou de  $>$  ou de  $\geq$  implica uma desvalorização de 3 pontos nesta etapa.

**2.º Processo**

Seja  $P(x, y, z)$  um ponto genérico da superfície esférica.

- Determinar as coordenadas do vetor  $\overrightarrow{AP}$  ..... 2 pontos
- Determinar as coordenadas do vetor  $\overrightarrow{BP}$  ..... 2 pontos
- Escrever  $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BP} = 0$  ..... 3 pontos
- Escrever a condição  $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2z = 0$  (ou equivalente) ..... 3 pontos

**5.3.** ..... **15 pontos**

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos.

**1.º Processo**

Seja  $y$  a ordenada do ponto  $P$

- Escrever  $P(4, y, 0)$  ..... 2 pontos
- Determinar as coordenadas do vetor  $\overrightarrow{AB}$  ..... 1 ponto
- Determinar as coordenadas do vetor  $\overrightarrow{AP}$  ..... 1 ponto
- Calcular  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AP}$  ..... 2 pontos
- Determinar a norma do vetor  $\overrightarrow{AB}$  ..... 1 ponto
- Determinar a norma do vetor  $\overrightarrow{AP}$ , em função de  $y$  ..... 2 pontos
- Escrever a equação  $20 = \sqrt{20} \times \sqrt{20 + y^2} \times \frac{1}{2}$  (ou equivalente) ..... 3 pontos
- Obter o valor de  $y$  ( $\sqrt{60}$ ) ..... 3 pontos

**2.º Processo**

- Justificar que o triângulo  $[ABP]$  é retângulo em  $B$  ..... 5 pontos
- Determinar  $\overline{AB}$  ( $\sqrt{20}$ ) ..... 2 pontos
- Escrever  $\operatorname{tg} \frac{\pi}{3} = \frac{\overline{BP}}{\sqrt{20}}$  ..... 5 pontos
- Escrever  $\sqrt{3} = \frac{\overline{BP}}{\sqrt{20}}$  ..... 1 ponto
- Obter a ordenada de  $P$  ( $\sqrt{60}$ ) ..... 2 pontos



6. .... 15 pontos

Determinar  $f'(x)$  ..... 2 pontos

Obter  $f'(a)$  ..... 1 ponto

Determinar  $g'(x)$  ..... 2 pontos

Determinar  $g'\left(a + \frac{\pi}{6}\right)$  ..... 4 pontos

Escrever  $g'\left(a + \frac{\pi}{6}\right) = 3 \cos\left(3\left(a + \frac{\pi}{6}\right)\right)$  ..... 1 ponto

Escrever  $3 \cos\left(3\left(a + \frac{\pi}{6}\right)\right) = 3 \cos\left(3a + \frac{\pi}{2}\right)$  ..... 1 ponto

Concluir que  $3 \cos\left(3a + \frac{\pi}{2}\right) = -3 \sin(3a)$  ..... 2 pontos

Escrever  $f'(a) = -\frac{1}{g'\left(a + \frac{\pi}{6}\right)}$  (ou equivalente) ..... 2 pontos

Concluir que  $\sin^2(3a) = \frac{1}{9}$  ..... 1 ponto

Concluir que  $\sin(3a) = -\frac{1}{3}$  (**ver nota**) ..... 3 pontos

**Nota** – Se, na resposta, não for referido que  $3a \in \left] \pi, \frac{3\pi}{2} \right[$ , a pontuação a atribuir nesta etapa é 0 pontos.

## COTAÇÕES

### GRUPO I

1. a 8..... (8 × 5 pontos) .....	40 pontos
	<hr/>
	<b>40 pontos</b>

### GRUPO II

1. ....	15 pontos
2.	
2.1. ....	15 pontos
2.2. ....	15 pontos
3.	
3.1. ....	10 pontos
3.2. ....	15 pontos
4.	
4.1. ....	15 pontos
4.2. ....	15 pontos
4.3. ....	15 pontos
5.	
5.1. ....	5 pontos
5.2. ....	10 pontos
5.3. ....	15 pontos
6. ....	15 pontos
	<hr/>
	<b>160 pontos</b>
	<hr/>
<b>TOTAL .....</b>	<b>200 pontos</b>