

## 在 TI 上搭建数学：基于 TI 的数学教学模式探索

《国家数学课程标准》(以下简称《标准》)根据时代要求,对高中数学课程进行了全新的设计。在保持我国数学教育优良传统的同时,力求改变目前数学课程及其实施过程中的某些“繁、难、偏、旧”的状况。新世纪的高中数学课程目标是在九年义务教育数学课程标准的基础上,为我国公民的未来需要提供更高水平的数学基础和数学素养,为高一级学校的数学需求提供必要的数学基础和数学素养,以满足人类发展与社会进步的需要。新世纪的高中数学课程特别重视运用现代化信息技术手段,特别是要充分考虑计算机(计算器)对数学学习的影响,把现代信息技术作为学生学习数学和解决问题的强有力工具和认知工具,使学生从大量繁杂、重复的运算中解放出来,将更多的精力投入到现实的、探索性的数学活动中去。

正是基于上述认识,我们“信息技术与高中数学课程整合”课题组运用 TI-92 与 TI-92PLUS 图形计算器,对高中数学教学改革进行了初步探索。

### 一、TI 手持技术促进数学教学理念的转变

TI-92PLUS 有两个重要特征:① 强大的代数运算功能,它几乎囊括了中学所需要的各种代数运算,如:代数式的化简、求值,因式分解,解方程,求导,不定积分,定积分等;② 较强的几何作图功能,不仅能以函数表达式、参数形式、极坐标、3D 等多种方式自动绘出函数图象,还提供了让操作者根据需要自己绘制图形的功能。TI 手持技术进入高中数学课堂必将促进高中数学教学理念发生根本性的改变。

#### 1、让学生多角度地思考数学问题,亲眼“看见”解决方案的多样性

**问题 1:** 判断函数  $y = \sqrt{x^2 - 2x + 2} + \sqrt{x^2 - 10x + 29}$  是否有最值。若有,求出;若没有,说明理由。

在常规的数学教学中,问题 1 主要是利用数形结合法解答。将函数解析式配方变形为:  $y = \sqrt{(x-1)^2 + (0-1)^2} + \sqrt{(x-5)^2 + (0-2)^2}$ , 然后将求函数的最值转化为问题:已知 P(1, 1)、Q(5, 2) 两点,求在 X 轴上找一点 M(x, 0), 使  $|PM| + |QM|$  取得最值。这种解法主要借助解析几何和平面几何的知识,有较强的技巧性。

在问题 1 的解答过程中,借助 TI-92PLUS, 教师和学生可以一起“看见”以往我们只能想象的数学,从函数的图象、函数的计算和数形转化等三个方面来目睹解决方案的多样性。

(1) 利用函数图象研究函数最值反映了我们研究函数的一般思想方法:函数的图象直观地反映了函数的各种性质(单调性、周期性、奇偶性、最值等等),借助图象研究函数是一种基本策略。过去由于条件所限,许多函数的图象我们很难画出,甚至很难想象,现在用 TI-92PLUS, 一切问题迎刃而解,只要输入函数的表达式,机器可以自动绘出函数图象,师生也可以利用 TI-92PLUS 来研究函数的图象的合成过程。例如,令  $y = \sqrt{x^2 - 2x + 2}$ ,  $y = \sqrt{x^2 - 10x + 29}$ , 学生知道  $y_1$  与  $y_2$  的图象类似于抛物线,那么,  $y = y_1 + y_2$  的图象呢? 通过在同一坐标系内画出三个函数的图象(如图 1-1 所示:  $y_1$  实线,  $y_2$  虚线,  $y$  为加粗线), 师生共同分析出图象的特征,也判断出函数的最值特征。

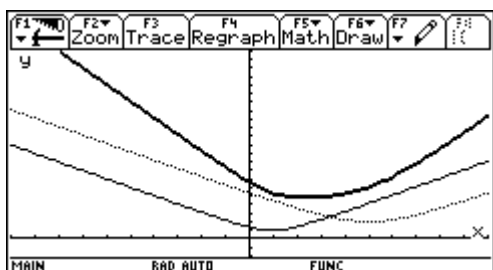


图 1-1

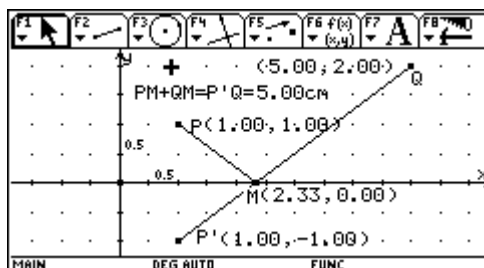


图 1-2

(2) 也可以从函数最值计算的角度,使用 TI-92PLUS 中内置的高级数学软件 ( fMax, fMin) 直接求出函数最值: 当  $x = 7/3$  时函数取得最小值,并可计算出其最小值为 5; 函数没有最大值。TI-92PLUS 窗口的显示很有趣地说明了求函数最大值的过程:

$fMax(y = \sqrt{x^2 - 2x + 2} + \sqrt{x^2 - 10x + 29}, x) \quad x = \infty \text{ or } x = -\infty$  (即: 求出函数取得最大值时  $x$  的值为  $\infty$  或  $-\infty$ )

$y = \sqrt{x^2 - 2x + 2} + \sqrt{x^2 - 10x + 29} \mid x = \infty$  Non-real result (即: 当  $x = \infty$  时, 函数的最大值并不是一个真正的数)

当然, 学生还存在一定的疑问: TI-92PLUS 是用什么方法算出函数取得最值时  $x$  的值呢? 这个问题也给学生进一步探讨求函数最值的一般方法埋下了伏笔。

(3) 利用 TI-92PLUS 也可以从数形结合的角度来解答问题 1。学生可以通过动手设计作图过程, 借助轴对称与动画效果等知识, 来直观地印证初中学过的平面几何知识在解答这里的函数最值问题时的巧妙应用 (如图 1-2 所示)。

TI-92PLUS 给师生的教与学都带来了崭新的观念: **数学也可以边看、边尝试、边学。**

## 2、让学生动手做数学, 亲自“体验”数学的实验特性

数学问题的解决同样需要做实验。在教师的引导下, 学生亲手操作, 主动探索, 相互交流, 主动发现, 积极创新, 这样才能让学生的主动参与落在实处。问题 1 和下面问题 2 的解决, 从三个角度生动地反映了数学的实验特性。

**问题 2:** 求函数  $y = \frac{\cos \theta + 3}{\sin \theta - 2}$  的最值。(令  $y = \cos x + 3$ ,  $y = \sin x - 2$ , 则  $y = y_1 / y_2$ )

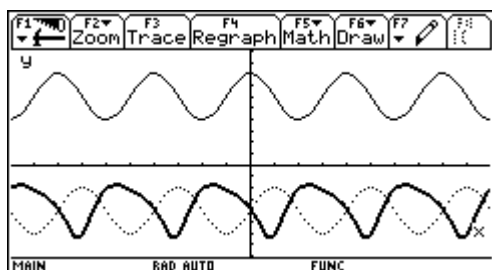


图 2-1

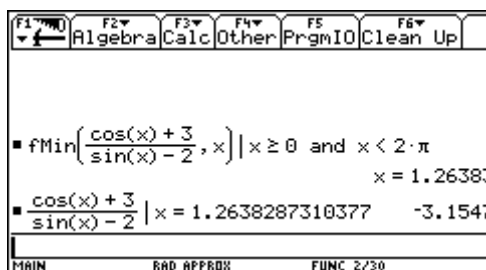


图 2-2

(1) **图象的研究:** 在绘制函数图象时, 往往需要不断试验来选择坐标系的合适部分, 表现想研究的那一段图象。这一过程在徒手绘图时, 往往很繁琐。现在, 学生借助 TI-92PLUS 的  $\diamond + window$  功能, 通过窗口设置, 改变坐标系的显示, 不断地尝试, 就可选择一个最佳的研究视角。问题 1、2 的作图即反映了这一实验特性。又如在研究问题 1、2 的两个函数图象的特征时, 需要将函数分解成基本的二次函数或三角函数, 然后探索部分函数图象与复合函数图象之间的关系。当在同一坐标系中绘制图象间的叠加 (除) 时, 可以定义每个图象的不同表现方式 (如: 实线表示  $y_1$ , 虚线表示  $y_2$ , 加粗线表示  $y_1 - y_2$  或  $y_1 / y_2$  等) 来加以区分 (如图 1-1、2-1 所示), 当效果不理想时, 调整也很方便, 这为师生动手探索问题提供了很大的便利。

(2) **内置功能的探索:** 利用 TI-92PLUS 内置的求函数最值功能 (fMax, fMin), 可以直接得出函数取最值时自变量  $x$  的值, 然后算出因变量  $y$  的值, 使学生可以很容易地解决相关问题。学生在解完问题 1 后, 自然而然地用同样的方法来解问题 2, 却遇到了困难: TI-92PLUS 给出的结果是方程形式, 而不是最终的  $x$  值, 是什么原因呢? TI-92PLUS 的功能所限? 能不能调整有关设置算出结果呢? 这时, 教师引导学生分析问题 2 中函数的图象, 发现, 函数是周期函数, 它取得最值时对应的  $x$  值有无数多个, 并且  $x$  的值中含有无理数  $\pi$  也造成求解运算量偏大。为了减少计算器的运算量, 可以添加附属条件, 求一个周期内函数最值的近似值 (如图 2-2 所示)。学生经过反复尝试, 终于解决了问题。

(3) **通法的寻找:** 问题 1 中所用的求函数最值功能 (fMax, fMin) 可引起学生的强烈兴趣: 是否有一种通用的求函数最值的方法, 就象用求根公式算出一元二次方程的根那样? 这时, 教师可以向学生简要介绍利用导函数求最值是一般方法, 在初等数学与高等数学之间搭起桥梁, 鼓励优生自学课本中的选学内容。另外, 学生可以看书时只抓住主要思想, 计算过程让 TI-92PLUS 来完成。这样, 学生学习知识所获得的不仅是一些技巧, 更重要的是获得了研究问题的一般方法。

## 3、使用图形计算器能够突出数学教学的“个别化”, 利于学生主体参与。

数学学科的特点要求学习者在数学学习中必须进行充分、积极、主动的思维活动, 数学学习离开了学生的积极参与是必然失败的。传统教学中学生的参与情况如何呢? 学生围着老师转是以黑板为主要手

段的教学中一个明显的特点，课堂大部分时间中老师最为活跃，学生大部分时间处于静听、抄笔记，作练习的状态，多数人往往是被动的听众，并没有积极参与。使用图形计算器，为学生提供了大量的观察材料，这就给学生的自主学习提供了足够的物质基础。使用图形计算器作为传统教学的补充，可以极大的调动学生的课堂参与，体现“个别化”和“因材施教”的原则。

## 二、TI 手持技术与高中数学课程内容的整合

现代信息技术正在对数学教学产生深刻影响。我们不仅应重视利用信息技术来呈现课程内容，更应重视信息技术与课程内容的有机整合。我们借助于先进的数学教育平台：“TI-92 与 TI-92PLUS 图形计算器”将信息技术与高中数学课程内容（特别是以下五方面的教学内容）进行全面整合：

### 1、算法

《标准》指出：算法是中国古代数学的优良传统，又是当代计算机技术的重要理论基础，应当正式地提出算法概念，应让学生熟悉算法的语言，学会设计简单问题的算法框图，掌握算法的一些典型范例，并把算法的思想渗透和贯穿于相关的数学内容之中。如有限的排序算法、关于“图”的算法、无限的迭代算法等，以及对算法复杂性的初步认识，也应进入中学。这是信息时代赋予我们的任务。

### 2、数据处理

《标准》指出：21 世纪每个公民所需要知道的数学知识，以数据处理最为重要。人们在工作中、日常生活中，不断受到数据信息“轰炸”的冲击。广告里的数据频频出现，大部分涉及数据的运用。因此，高中数学基本课程中的概率统计内容的安排，应当是先统计，后概率，展开的线索应是：提出问题、收集数据、整理数据、解释数据、研究数据特征、做出统计判断。学生应当经历这样的全过程。数据处理需要学生参与操作。课程应强调统计思想的内核，避免把数据处理变成“算术”计算。数据处理和概率的教学，主要依靠编制事例，提出课题，进行实际问题的处理。用案例教统计，而不从一般的抽象概念出发，以免烧成夹生饭。

### 1、函数

《标准》指出：函数是高中数学的核心内容。各种初等函数的教学，重点在于“为各种数量变化提供数学模型”，包括结合计算器的操作，体现“指数爆炸”、“直线上升”、“对数增长”等含义，了解以 2 为底的对数适用于信息量单位（“比特”）的定义，三角函数则是周期性变化的模型等等。例如，在指数函数的教学中，可以给出某城市十年期间燃料的消耗量，让学生利用图形计算器，给出这些数据的回归方程，画出方程的图象，并预测若干年后的燃料消耗量。通过图形计算器，学生可以很方便地描点、画图，并根据图形猜测方程为指数函数，还可直接利用其提供的功能直接求消耗量。

### 4、方程

《标准》指出：高中阶段会遇到简单的无理方程、三角方程、指数方程，但不展开。注意借助计算机和图象计算器，求得各种各样方程的近似解。了解二分法、迭代法也是需要的。此外函数、方程、曲线三者间的关系，很容易在计算机或图形计算器上反映出来。大量地观察函数库、图象库、方程库里的藏品，可以扩大学生的视野。

### 4、数列

《标准》指出：数列可以看作是函数的特例。在整数坐标的图象上，观察“差分”。如果差分相等，就是等差数列，若前项与后项之比是常数则是等比数列，直观且有新意。与数列密切相关的是迭代算法。迭代数列用计算机语言的循环语句加以表达。[1]

最近，人民教育出版社中学数学室将 TI 手持技术等现代信息技术与高中数学课程教材进行全面整合，编著出版发行《全日制普通高级中学实验教科书（信息技术整合本）·数学》，并在全国部分高中教改实验区进行实验研究。

## 三、TI 手持技术引领高中数学教学模式的改革

### 1、探究性学习

《标准》着重强调“探究性学习”，它已经成为新的课程教学与学习的基本要素。“探究性学习”的突出特点可归纳为：“探究性、实践性、开放性和综合性”四大特征。《标准》设立“数学探究”专项课程，为学生形成

正确、积极主动的、多样的学习方式创造有利的条件，旨在激发学生的数学学习兴趣，促进学生参与实践、自主探索、合作交流、阅读自学，帮助学生形成独立思考的习惯。

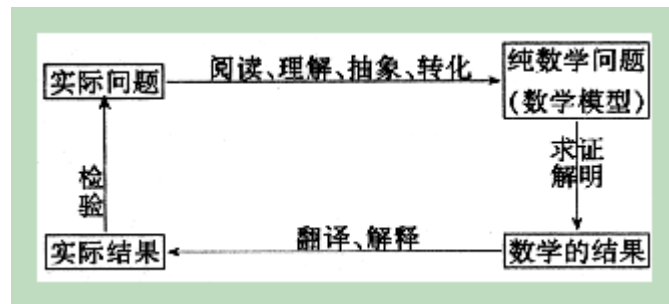
我们构建了基于 TI 手持技术的探究性学习模式：“创设情境——自主探究——猜想假设——推理论证——分析评价”。它主要适用于数学概念、公式、定理、法则、例题等知识形成过程的教学，能充分体现学生主动参与数学真理的发现历程，注重对学生发现知识策略和方法的培养。它应当成为培养学生创新精神和创新能力的主要教学模式。

我们在高中数学教改实验中，指导学生运用 TI-92 或 TI-92PLUS 图形计算器对高中数学课程中的“函数”（特别是二次函数、指数函数、对数函数、幂函数、无理函数、三角函数等）、“直线”、“圆锥曲线”、“立体几何”等内容进行探究性学习。例如问题 1 与问题 2 所示。

### 1、数学研究性学习——图形计算器与 CBL 系统和专用电子探头连接接收并分析有关数据解决实际问题

20 世纪下半叶以来，数学最大的发展是应用。计算机技术的广泛使用，使得数学能够在某些方面直接为社会创造价值。因此，《标准》着重强调发展学生的数学应用意识。高中数学在数学应用和数学实践方面需要大力加强。我国大、中学数学建模的实践活动表明学生具有很强数学应用能力，《标准》不仅要突出知识的来龙去脉，还要为学生创设应用实践的空间，如单独设立“数学建模”的专题课程，设立数学与日常生活相联系的“数学与社会”课程，以及与社会人文科学相联系的专题课程等，从而促进学生在学习和实践的过程中形成和发展数学应用意识。

建立数学模型，简称“数学建模”：把现实世界中的实际问题加以提炼，抽象为数学模型，求出模型的解，验证模型的合理性，并用该数学模型所提供的解答来解释现实问题的过程。也可以说，数学建模是利用数学语言模拟现实的模型，并利用数学的思想、方法、知识解决实际问题的过程。数学建模的主要程序是：



TI 图形计算器配合 CBL 系统和各种传感器（俗称探头）等，可以方便、迅速的收集现实世界或实验室中的各类物理、化学、生物、环境等数据，并能传输给图形计算器，进行形象直观的分析处理，得出实验结论。它使数学教学形成一种更加开放、更加综合的数学研究性学习模式。

#### 问题 3：利用光强度探测仪画出白炽灯的光强度图

说明：由于我们使用的市电是正弦交流电，灯光的强度不是一个恒定值，而是一个随着时间而变化的。可用测光强度变化来分析市电的周期和频率，并得出结论。

**所需设备：**CBL 机，TI-92 图形计算器和与 CBL 机相连接的连线，标准灯光泡（15W 或 25W），光的强度探测仪。

**设备安装：**（1）利用 I/O 端口，使用“单元——单元连线”把 CBL 与 TI-92 连结起来。

（2）把 TI 光学探头连接在 ch1 的入口。

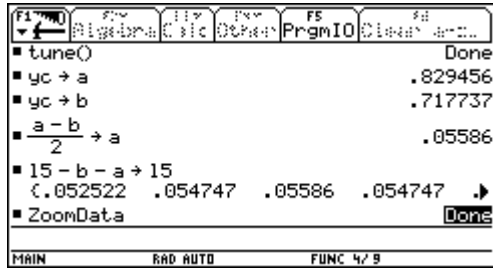
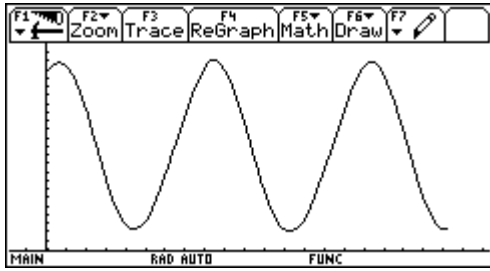
（3）接通 TI-92 和 CBL 的电源。

#### 实验过程：

（1）运行程序(tune)收集光的强度实验数据。

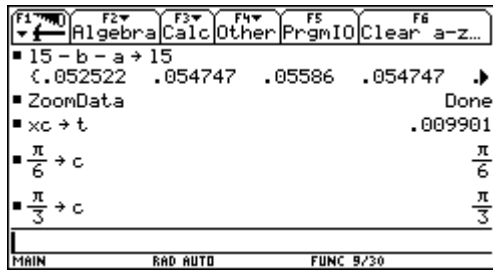
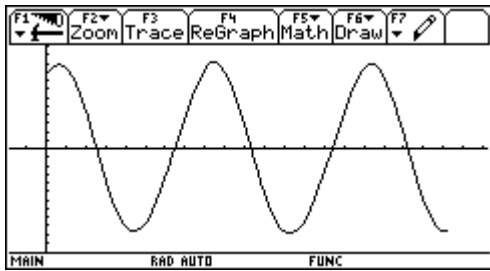
作出光的强度图象。

时间变量保存在 L2 中；光的强度变量保存在 L5 中。



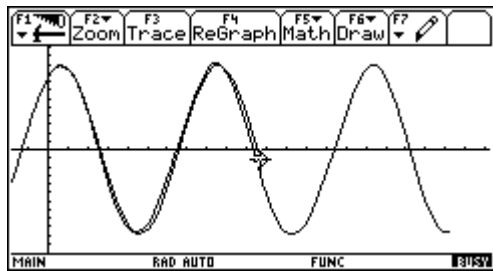
(2) 问题：作如何变换可以把这条曲线变为正弦型曲线。

利用 F3 跟踪功能把光标定位在 y 最大值处，把最大值 y 赋给变量 a，把光标定位在 y 最小值处，把最小值 y 赋给变量 b，把  $(a-b)/2$  赋值给 a。这时 a 的值就是曲线的振幅。经重新给 L5 赋值  $L5-a-b=L5$  后，就得到如下图象。



在图象上求出周期 t 并猜测初相 c 的值，通过 c 的几个不同的值对图象的影响，更好地理解初相对图象的作用。

得出回归函数  $y_1(x)$  如下图。作出拟合曲线的图象如下：



(3) 思考题：通过上面的图象能否求出市电的频率和周期？如何求？通过这次实验你对正弦型曲线理解有哪些提高？

新一轮高中数学教学改革正在将变革学习方式、倡导探究性学习与研究性学习放在突出地位，而 TI 手持技术的广泛应用将加速这一变革的实现，在培养学生数学素养、创新精神和实践能力的同时提高学生的信息素养。

#### 四、参考文献

[1] 《国家高中数学课程标准》制订组，《高中数学课程标准》的框架设想，“数学教学”，2002 年第 2 期，第 1—5 页。

——发表在中央电化教育馆主办国家级教研期刊《信息技术教育》2003 年第 3 期上