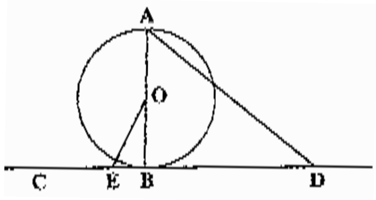
2006年上海市TI杯高二年级数学竞赛

个人赛试题

（2006年5月21日上午9：00~10：30）

一、填空题：（共8小题，前4小题每题6分，后4小题每题9分，满分60分）

1、如图，AB是单位圆O的直径，过点B作圆O的切线CB，再作□EOB=30°，交CB于点E；自E作ED= 3OB，连接AD，则AD的长为 ___________（精确到0.0001）。



2、天文学中，一个恒星年E = 365.256天，月球绕地球一周所需时间称为一个恒星月，其大小表示成T=27.322天。而月球绕地球运动时，我们所看到的月亮月貌变化以满月，半月，镰刀形月，望月，新月，…… 又回到满月，这样一个周期的时间称为朔望月，其大小用字母 S 表示，E，T，S 满足会合运动方程：$\frac{1}{S}+\frac{1}{E}=\frac{1}{T}$，由此可得，S= _______ 天（精确到0.001天）。

3、有一个根据某年某月某日计算“星期几”的有趣公式：

$$\mathrm{d}+\left[2.6m-0.2\right]+\mathrm{y}+\left[\frac{y}{4}\right]+\left[\frac{c}{4}\right]-2c$$

除以7的余数，其中c表示年的前面两个数字（即世纪），y表示年的后两位数字，d表示日，m表示月对应的数字，见下表：

月　份	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
对应的m值	11	12	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

[x] 表示不超过 x 的最大整数。则 2008 年 6 月 18 日是星期 ________ 。

4、实数 x，y，z（x ≠ y）满足 $5(x-y)+\sqrt{5}(z-y)+(z-x)=0$，则 $\frac{(y-z)(z-x)}{(x-y)^2}=$ ______ 。

5、已知 $\left\{(x,y)\left|\left(x+\sqrt{2}\right)^2+y^2=a^2-3a+2\right.\right\}\cap\left\{(x,y)\left|x^2+\left(y+\sqrt{2}\right)^2<a\right.\right\}\neq\phi$，则实数 a 的取值范围是 ____________________ 。

6、若正方形内接于由y = sinx ($0\le x\le\pi$) 图像与x轴所围图形内，那么，这个正方形的边长为 _______ （精确到 10^{-9} ）。

7、2005 年 12 月 15 日，中密苏里州大学的Curtis Cooper 和Steven Boone教授发现了第 43 个麦森质数 $2^{30402457}-1$，这个质数是__________ 位数；它的末两位数是_____________ 。

8、一个正整数其立方数的开头数字是 200，末尾数字是 6，这样的正整数最小是 __________ 。

解答以下三题必须写出解题的必要步骤。

二、（本题满分 20 分）

（1）画出函数 $f(x)=\left|3|x|-1\right|$ 的图像；

（2）如果关于 x 的方程 $\left|3|x|-1\right|=2^x+a$ 有 4 个实数根，求实数 a 的取值的集合。

三、（本题满分 20 分）

设数列 $\{a_n\}$ 的通项为 $a_n=n+\frac{2006}{n^2}$，n=1，2…，求数列 $\{a_n\}$ 的最小项。

四、（本题满分 20 分）

n 为大于 1 的正整数，若存在正整数 i（i＜n），使得

$$\left(1^2+2^2+\cdots+i^2\right)-\left[(i+1)^2+(i+2)^2+\cdots+n^2\right]$$

是一个完全平方数，则称n为“TI数”。例如，由（ $1^2+2^2+\ldots+9^2$ ）–（ 10^2+11^2 ）$=8^2$，

知 11 是“TI数”。问：46，36，26 是不是“TI数”？为什么？