

# 2011 年上海市 T I 杯高二年级数学竞赛

## 个人赛试题

(2011 年 5 月 21 日下午 1:30~3:00)

题 号	一	二	三	四	总 分
得 分					
评卷人					
复卷人					

一、填空题 (共 8 小题, 前 4 小题每题 6 分, 后 4 小题每题 9 分, 满分 60 分)

1、计算:  $\frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} + \frac{1}{33} + \frac{1}{35} + \frac{1}{45} + \frac{1}{55} + \frac{1}{77} + \frac{1}{105} =$ \_\_\_\_\_.

2、根据 2010 年第 6 次全国人口普查主要数据公报, 我国境内总人口为 1339724852 人, 与 2000 年第 5 次全国人口普查相比, 10 年增加了 7390 万人, 那么这 10 年的年平均增长率是\_\_\_\_\_ (精确到 0.00001).

3、设  $AB$  是单位圆  $O$  的一条弦, 若圆  $O$  的面积恰好等于以  $AB$  为边的正方形的面积, 则  $\angle AOB =$ \_\_\_\_\_ (精确到 0.001 度).

4、在区域  $\begin{cases} \frac{x^2}{9} + y^2 \leq 1, \\ x \geq 0 \end{cases}$  中, 所能含的圆的最大半径为\_\_\_\_\_.

5、已知函数  $f(x) = \cos x, x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$  与函数  $g(x) = \tan x$  的图像相交于点  $A$ , 过点  $A$  分别作  $AB \perp x$  轴,  $AC \perp y$  轴, 垂足分别为  $B, C$ , 则四边形  $OBAC$  的面积为\_\_\_\_\_ (精确到 0.0001).

6、当  $s$  和  $t$  取遍所有实数时,  $(s+7-|\cos t|)^2 + (s-2|\sin t|)^2$  的最小值是\_\_\_\_\_.

7、设椭圆  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  的右顶点为  $A$ , 若椭圆上存在一点  $P$  使得  $\angle OPA = \frac{\pi}{2}$  ( $O$  为坐标原点), 则  $\frac{b}{a}$  的取值范围为\_\_\_\_\_.

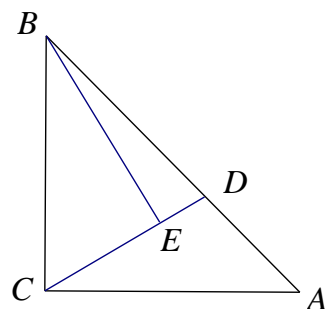
8、一个六位数  $\overline{6xyzx6}$  ( $x, y, z$  可以相同) 是完全平方数, 则所有这样的六位数为\_\_\_\_\_.

学校\_\_\_\_\_ 姓名\_\_\_\_\_ 订\_\_\_\_\_ 装\_\_\_\_\_ 年级\_\_\_\_\_ 性别\_\_\_\_\_ 准考证号\_\_\_\_\_

解答以下三题必须写出解题的必要步骤.

二、(本题满分 20 分) 如图, 在等腰直角三角形  $ABC$  中,  $\angle ACB = 90^\circ$ .  $D$  为斜边  $AB$  上的一动点, 连接  $CD$ , 作  $BE \perp CD$ , 垂足为  $E$ , 求  $\frac{S_{\triangle ACD}}{S_{\triangle BCE}}$  的最小值.

【解】



三、(本题满分 20 分) 已知  $\{a_n\}$  是一个首项为 9, 公差为 7 的等差数列.

(1) 证明: 数列  $\{a_n\}$  中有无穷多项是完全平方数;

(2) 数列  $\{a_n\}$  中第 100 个完全平方数是第几项?

**【解】**

四、(本题满分 20 分) 设集合  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ ,  $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$  是两个由正整数组成的集合, 满足:

(1)  $A \cap B = \emptyset$ ;

(2)  $a_1 + a_2 + \dots + a_n = b_1 + b_2 + \dots + b_n$ ;

(3)  $a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 = b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2$ .

当  $n = 3, 4, 7$  时, 试给出满足上述条件的集合  $A, B$ .

**【解】**

装  
订  
线