2008 年上海市 T I 杯高二年级数学竞赛答案

个 人 赛 试 题

一、填空题

题 号	1	2	3	4
答 案	**4**	**51000; 60**	$y=x^3-2x^2-x+2$	**26**
题 号	5	6	7	8
答 案	**376, 625**	$\dfrac{\sqrt{30}}{2}$	**384000**	**28054**

二、**解** 由 $x-1<[x]\le x$ 得

$$\frac{n}{2}+\frac{n}{3}+\frac{n}{4}+\frac{n}{5}-4<\left[\frac{n}{2}\right]+\left[\frac{n}{3}\right]+\left[\frac{n}{4}\right]+\left[\frac{n}{5}\right]\le\frac{n}{2}+\frac{n}{3}+\frac{n}{4}+\frac{n}{5},$$

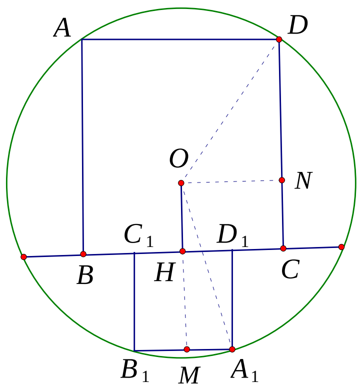
所以
$$\frac{n}{2}+\frac{n}{3}+\frac{n}{4}+\frac{n}{5}-4<69\le\frac{n}{2}+\frac{n}{3}+\frac{n}{4}+\frac{n}{5},$$

故 $53<n<57$，于是 $n=54$，55，56.

经检验 n＝55 满足题意.

满足题意的正整数 n＝55.

三、**解** 设正方形 $A_1B_1C_1D_1$，$ABCD$ 的边长分别为 a，b，延长 OH 与 A_1B_1 相交于点 M，作 $ON\perp CD$，交 CD 于点 N，则由勾股定理得



$$OM^2+MA_1^2=R^2=ON^2+DN^2,$$

所以
$$(2008+a)^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2=\left(\frac{b}{2}\right)^2+(b-2008)^2,$$

$$2\times2008(a+b)=\frac{5}{4}(a+b)(b-a),$$

故
$$b-a=\frac{8}{5}\times2008=3212.8。$$

四、**解** 设圆盘 G 的边界上点 $P(x,\ y)$ 的坐标为

$$\begin{cases} x = 2008 + \cos\theta, \\ y = 525 + \sin\theta, \end{cases} \quad 0 \le \theta < 2\pi,$$

代入抛物线方程 $y^2 = 2px$，得

$$(525 + \sin\theta)^2 = 2p(2008 + \cos\theta),$$

所以
$$p = \frac{(525 + \sin\theta)^2}{2(2008 + \cos\theta)},\ 0 \le \theta < 2\pi .$$

利用图形计算器可得

$$p_{\min} = 68.368306, \quad p_{\max} = 68.895664,$$

为了使抛物线穿过 G，对 $p_{\min}$ 用进一法取近似值，对 $p_{\max}$ 用去尾法取近似值，

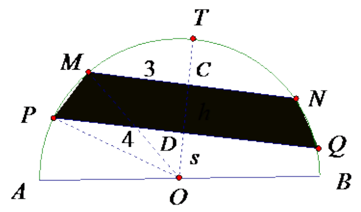
所以，p 的取值范围为 $68.369 \le p \le 68.895$.

2008 年上海市 T I 杯高二年级数学竞赛答案

团体赛试题答案

一、**解** 作垂直于平行弦 MN，PQ 的半径 OT，垂足分别为 C，D，连接 OP，OM，又设圆心 O 到 PQ 的距离为 s，圆 O 的半径为 R，则在 Rt△OPD 和 Rt△OMC 中，可得方程组

$$\begin{cases} s^2+16=R^2, \\ (s+2)^2+9=R^2, \end{cases}$$



解得
$$\begin{cases} s=\dfrac{3}{4}, \\ R=\dfrac{\sqrt{265}}{4}. \end{cases}$$

设 $\angle TOM=\alpha, \angle TOP=\beta$，则

$$\tan\alpha=\frac{3}{h+s}=\frac{12}{11},\ \ \alpha=\arctan\frac{12}{11},$$
$$\tan\beta=\frac{4}{s}=\frac{16}{3},\ \ \beta=\arctan\frac{16}{3},$$

所以 $\overset{\frown}{MP}$ 的长 $=R(\beta-\alpha)=\dfrac{\sqrt{265}}{4}(\arctan\dfrac{16}{3}-\arctan\dfrac{12}{11})\approx 2.26519511045$，

故 $\overset{\frown}{MP}$ 的长为 2．265m．

二、**解** 连接 DF，在三角形 BDF 中，由余弦定理

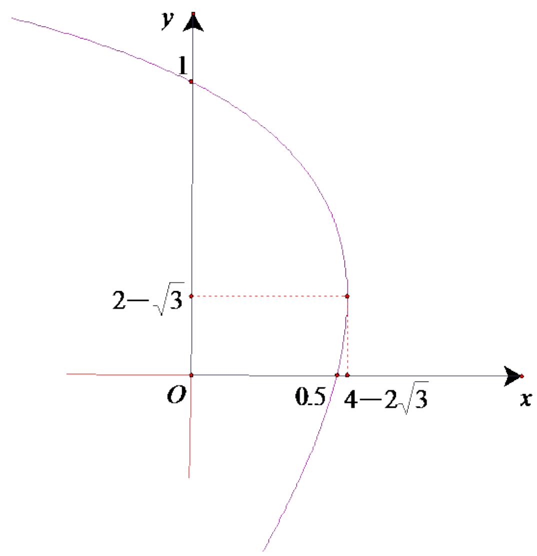
$$DF^2=BD^2+BF^2-2BD\cdot BF\cos 60^\circ,$$

即

$$(1-x)^2=y^2+x^2-2y\cdot x\cdot\frac{1}{2},$$

所以

$$y^2-xy+2x-1=0,\ 0\le y\le 1.$$



利用图形计算器可得到其大致图像（如右图）.

令 $t=2-y$，则

$$x=\frac{1-y^2}{2-y}=\frac{1-(2-t)^2}{t}=-(t+\frac{3}{t})+4,\ 1\le t\le 2.$$

所以，x 的取值范围为$\left[0,\ 4-2\sqrt{3}\right]$.

三、**解**　(1) 显然 $n>4$.

若 $n=5$，则 $4\,|\,(3+5)$；若 $n=6$，则 $3\,|\,6$；若 $n=7$，则 $7\,|\,(3+4)$；若 $n=8$，则 $4\,|\,8$；若 $n=9$，则 $3\,|\,9$.

当 $n=10$ 时，经检验知 $\{3,4,10\}$ 是“好集”，所以，n 的最小值 $n_0=10$.

(2) 若 $\{3,4,10,m\}$ 是“好集”.

则 m 不是 3 的倍数，同时 3 也不能整除 $10+m$，即 m 不是 $3k+2$ 形式的；

3 也不能整除 $10+4+m$，即 m 不是 $3k+1$ 形式的，所以，对于任意正整数 $m\,(m\neq 3,4,10)$，集合 $\{3,4,10,m\}$ 不是“好集”.